www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

ANALYSE NUMERIQUE

DUREE : 3 heures. - COEFFICIENT : 4

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

Notations et objectif du problème

Dans tout le problème $\mathbf{R}[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et pour tout entier naturel n, $\mathbf{R}_n[X]$ est le sous espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Le but du problème est de mettre en place une méthode pour calculer numériquement un certain type d'intégrales généralisées où l'intervalle d'intégration est R tout entier.

I. Une structure euclidienne sur R[X]

1. Définition de la structure euclidienne.

a. Montrer que pour tout couple (P,Q) de polynômes l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx$ converge et que

$<P,Q>=\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx$ définit un produit scalaire euclidien sur $\mathbf{R}[X]$.

On supposera désormais $\mathbf{R}[X]$ muni de cette structure euclidienne.

b. Montrer qu'il existe une suite unique $(E_i)_{i\geq 0}$ de droites vectorielles de $\mathbf{R}[X]$ telle que les droites E_i sont deux à deux orthogonales et que pour tout entier naturel n le sous espace vectoriel engendré par $E_0,E_1,...,E_n$ est $\mathbf{R}_n[X]$.

2. Une base de polynômes orthogonaux.

Pour tout entier naturel n on pose $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$.

a. Calculer $H_0(x),H_1(x),H_2(x),H_3(x)$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, H_n est un polynôme de degré n. Quel est le coefficient du terme de plus haut degré de ce polynôme?

c. Montrer que si m et n sont deux entiers naturels tels que n>m les polynômes H_m et H_n sont orthogonaux. En conclure que pour tout entier naturel n le polynôme H_n appartient au sous espace E_n introduit au I.1.b. Quelle est la norme de H_n? Pour les calculs on pourra utiliser la formule $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

d. Montrer que pour tout entier naturel n $H_{n+1}(x)= 2xH_n(x) - \frac{dH_n(x)}{dx}$.

e. Montrer que pour tout entier n≥1 il existe une constante α_n telle que $\frac{d}{dx}H_n(x)=\alpha_n H_{n-1}(x)$,

et calculer pour tout n≥1 la valeur de α_n.

Tournez la page S.V.P.

f. Conclure de l'étude précédente que pour tout entier naturel n $\frac{d^2H_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x)=0$,

et que pour tout entier n≥1 $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0$.

Montrer que pour tout entier naturel n, H_{2n} est pair et H_{2n+1} est impair.

g. Montrer que pour tout entier naturel n, H_n a n racines réelles distinctes.

II. Une formule d'intégration exacte pour certains polynômes

Soient n un entier naturel et $x_0,x_1,...,x_n$ les n+1 racines du polynôme H_{n+1}. Soient I la forme linéaire sur R[X] définie par

$$I(P)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{-x^2}dx$$

et $x_0^*,x_1^*,...,x_n^*$ les n+1 formes linéaires sur $R_n[X]$ définies par $x_j^*(P)=P(x_j)$.

1. Une formule exacte d'intégration.

a. Montrer que les n+1 formes linéaires $x_0^*,x_1^*,...,x_n^*$ constituent une base du dual de $R_n[X]$. En conclure qu'il existe des constantes $a_0,a_1,...,a_n$ telles que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{-x^2}dx=\sum_{i=0}^{n} a_iP(x_i) .$$

b. Montrer que cette égalité a lieu aussi pour les polynômes $H_0H_{n+1},...,H_nH_{n+1}$. En conclure que cette égalité reste valable pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 2n+1.

2. Un exemple.

On prend n=2. Chercher les racines de H_3 puis les coefficients a_0,a_1,a_2 intervenant dans la formule précédente.

III. Interpolation d' Hermite

1. Interpolation d'Hermite.

Soient un entier naturel n et n+1 nombres réels distincts $x_0,x_1,...,x_n$. Soit u l'application de R[X] dans R^{2n+2} définie par

$$u(P)=(P(x_0),...,P(x_n),P'(x_0),...,P'(x_n)) .$$

a. Montrer que u est une application linéaire. Quel est son noyau?

b. Montrer que la restriction de u à $R_{2n+1}[X]$ est une bijection de $R_{2n+1}[X]$ sur R^{2n+2}.

Tournez la page S.V.P.

2. Division des fonctions dérivables.

Soit f une fonction réelle définie sur R de classe C^{p+1}, où p est un entier naturel. On suppose que f s'annule en un point a de R.

a. Montrer qu'il existe une fonction continue et une seule g telle que pour tout réel x

$$f(x)=(x-a)g(x)$$

et que cette fonction peut s'écrire

$$g(x)=\int_0^1 f'(a+(x-a)u)du \ .$$

b. Montrer que la fonction g ainsi définie est de classe C^p. Calculer $g^{(q)}$ puis montrer que pour tout entier naturel q inférieur ou égal à p et pour tout réel x

$$|g^{(q)}(x)| \leq \frac{1}{q+1} \sup_{t\in[a,x]} |f^{(q+1)}(t)| \ .$$

3. Application à l'interpolation d'Hermite.

Soient f une fonction réelle définie sur R de classe C^{2n+2} et n+1 points $x_0,x_1,...,x_n$ distincts de R où n est un entier naturel. Soit P le polynôme de degré 2n+1 dont l'existence et l'unicité découlent de la partie III.1. vérifiant

$$P(x_0)=f(x_0),...,P(x_n)=f(x_n),P'(x_0)=f'(x_0),...,P'(x_n)=f'(x_n) \ .$$

Montrer que pour tout x

$$|f(x)-P(x)| \leq \frac{(x-x_0)^2...(x-x_n)^2}{(2n+2)!} \sup_{t\in I} |f^{(2n+2)}(t)|$$

où I est le plus petit intervalle contenant les points $x_0,x_1,...,x_n$ et x.

Dans le cas particulier n=2 déjà étudié dans la partie II.2. et en supposant la dérivée 6ième de f bornée sur R par un nombre M_6, déterminer une majoration de

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-x^2}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{-x^2}dx \right|$$

et donner une formule approchée pour le calcul de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-x^2}dx \ .$$

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail